1．文字 a, b を含んだ次の命題 p について考える．

命題 p：$-5 \leqq 2b - a \leqq 4 \Longrightarrow 1 \leqq b \leqq 10$

（1） a を自然数とする．すべての実数 b に対して，命題 p が真となるような a は $\boxed{}$ 個ある．

（2） a を正の偶数とする．すべての自然数 b に対して，命題 p が真となるような a は $\boxed{}$ 個ある．（20　中京大・工）

考え方 （1） a は定数である．任意の b（すべての b）が掛かる領域（支配域という）は，

［もし $-5 \leqq 2b - a \leqq 4$ が成り立つならば，$1 \leqq b \leqq 10$ が成り立つ］

である．［ ］の外に「任意の b」があることに注意してほしい．任意の実数 b を取ってきて，$-5 \leqq 2b-a \leqq 4$ を満たさない b については，作業は終了，$-5 \leqq 2b-a \leqq 4$ を満たす b については $1 \leqq b \leqq 10$ が成り立つかどうかを調べ，それがすべての b について成り立つ，ということが分かったときに，命題が真になる．「$\dfrac{a-5}{2} \leqq b \leqq \dfrac{a+4}{2}$ という，範囲に制限があるのに，b は任意なのか？」とか，「b が任意というのは，$\dfrac{a-5}{2} \leqq b \leqq \dfrac{a+4}{2}$ の範囲の任意だ」と思ってはいけない．これでは支配域が違う．

▶解答◀ （1） p が真になるのは，

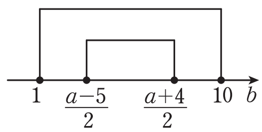
区間 $\dfrac{a-5}{2} \leqq b \leqq \dfrac{a+4}{2}$ ……………………………①

が $1 \leqq b \leqq 10$ に含まれるときで，

$1 \leqq \dfrac{a-5}{2}$ かつ $\dfrac{a+4}{2} \leqq 10$

が成り立つときである．これを a について解いて

$7 \leqq a \leqq 16$ となり，自然数 a は **10** 個ある．



（**2**） $a = 2c$ とおく．c は自然数である．① に代入し

$$c - 2.5 \leqq b \leqq c + 2 \quad \text{……………………………②}$$

となる．② を満たす自然数 b について，すべて $1 \leqq b \leqq 10$（自然数だから 1 以上は当たり前で，10 以下が問題）となるための必要十分条件は $c + 2 \leqq 10$ である．よって自然数 c は $1 \leqq c \leqq 8$ の 8 個あるから，a も **8** 個ある．なお，② を満たす自然数 b は，任意の c に対して，常に $b = c + 2$ が存在する．