3 四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ であり，辺 AD は面 ABC に垂直であり，辺 BC は面 ACD に垂直であるとする．

（1） 辺 BD の長さを求めよ．

（2） 点 C から辺 AB に下ろした垂線の長さを求めよ．

次に四面体 ABCD から十分に離れたところに直線 AB と平行な平面 α を一つとる．α に垂直な平行光線を四面体 ABCD にあてて，α 上に影をつくる．その影の面積を S とする．

（3） 面 ABD が α に平行であるときの S を求めよ．

（4） 直線 AB を軸として四面体 ABCD を 1 回転させるとき，S の最大値，最小値を求めよ．

（18　京都府立医大）

3 数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】やや難

▶解答◀ （**1**） △ABC は 60° 定規で AB $=1$ である．△ABD は ∠BAD $=90°$ の 90° 定規で BD $=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ である．

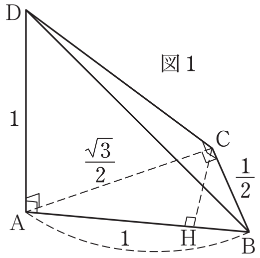


図 1

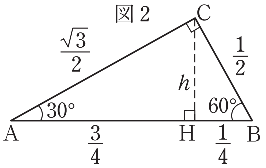


図 2

（**2**） C から AB に下ろした垂線の足を H とし，$h=\mathrm{CH}$ とおく．△ABC の面積を 2 通りで表して

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \therefore\quad h=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

（**3**） 面 ABD が α と平行のとき，S は △ABD の面積に等しい．

$$S=\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（**4**） α が AB を含むとしても同じことである．C，D から α に下ろした垂線の足を I，J とする．DA，CH が BA に垂直になっていて，回転する．∠CHI $=\theta$ とおく．$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である．

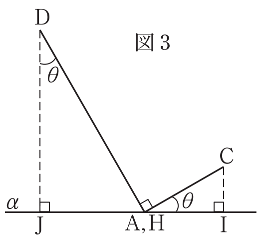


図 3

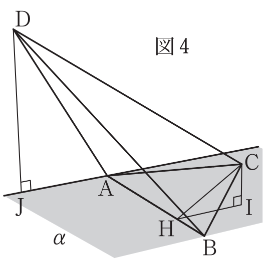


図 4

（ア） I，J が直線 AB に関して反対の側（直線 AB 上を含む）にあるとき．図 3 は B から A の方向を見た図である．

$$\mathrm{HI}=\mathrm{HC}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta,\ \mathrm{AJ}=\mathrm{AD}\sin\theta=\sin\theta$$

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{ABJ}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HI}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AJ}\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{8}(4\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\\&=\frac{\sqrt{19}}{8}\sin(\theta+u)\end{aligned}$$

と合成できる．ただし u は

$$\cos u=\frac{4}{\sqrt{19}},\ \sin u=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

を満たす鋭角で $\tan u=\dfrac{\sqrt{3}}{4}<1$ より $0<u<\dfrac{\pi}{4}$ である．S は $\theta+u=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{19}}{8}$ をとる．また，$\theta=0$ で最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ をとる．なお点 $(\cos(\theta+u),\ \sin(\theta+u))$ は図の太線部分にある．y 座標は $\theta=0$ で最小になる．

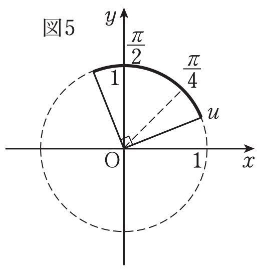


図5

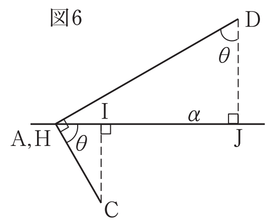


図6

（イ） I，J が直線 AB に関して同じ側（直線 AB 上を含む）にあるとき．図 6 を見よ．AJ，HI の長さは（ア）と同様である．

(a) I が三角形 ABJ の周または外部にあるとき（図 7 を参照せよ）．

$$\tan\angle\mathrm{HBI}\geqq\tan\angle\mathrm{ABJ}$$

$$\sqrt{3}\cos\theta\geqq\sin\theta$$

$$\tan\theta\leqq\sqrt{3}\qquad\therefore\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$$

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle\mathrm{ABI} + \triangle\mathrm{AJI} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}\cdot(\sin\theta)\cdot\frac{3}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leqq S \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

図 7

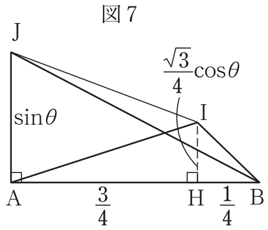
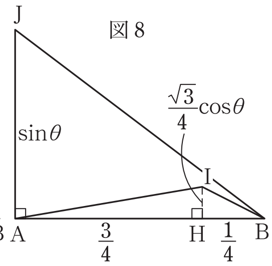


図 8



(b) I が三角形 ABJ の周または内部にあるとき（図 8 を参照せよ）．$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq S \leqq \frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{19}}{8}$ であるから，以上より $\dfrac{\sqrt{3}}{8} \leqq S \leqq \dfrac{\sqrt{19}}{8}$

S の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{19}}{8}}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{8}}$ である．