1．複素数 α, β についての等式

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

を考える．

（1） $|\alpha|=1,\ |\beta|=1$ のとき，この等式が成立することを示せ．

（2） この等式をみたす α, β については，$\alpha+\beta=0$，または $|\alpha\beta|=1$ となることを示せ．

（3） 極形式で $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表されているとき，この等式をみたす β を求めよ．

（20 和歌山県立医大）

考え方 （3） 「極形式」という言葉から $r>0$ であろう．

（3）では $\beta=-\alpha=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$ も答えの 1 つである．このまま答える人もいるだろう．OK なのか？ β も極形式で書くのか？マイナスを吸収するために，偏角に π を組込む．

▶解答◀ （**1**） $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ ………………①

$|\alpha|=1,\ |\beta|=1$ のとき $\alpha\overline{\alpha}=1,\ \beta\overline{\beta}=1$ であり，$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}=\overline{\beta}$ であるから ① が成り立つ．

（**2**） ① の両辺に $\alpha\beta$ を掛けて，

$$\alpha+\beta=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\alpha\beta \quad\cdots\cdots②$$

この両辺の共役複素数をとって，

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(\alpha+\beta)\overline{\alpha\beta} \quad\cdots\cdots③$$

③ を ② に代入して，$\alpha+\beta=(\alpha+\beta)\overline{\alpha\beta}\alpha\beta$

$$(\alpha+\beta)(|\alpha\beta|^2-1)=0$$

$\alpha+\beta=0$ または $|\alpha\beta|=1$ である．

（**3**） 「極形式」という言葉から $r>0$ であるものとする．

（2）は ① が成り立つための必要条件であることに注意せよ．逆に，$\beta=-\alpha$ のとき，① の両辺は 0 であるから ① は成り立つ．また $|\alpha\beta|=1$ のとき $|\beta|=\dfrac{1}{r}$ であり，$\beta=\dfrac{1}{r}(\cos x+i\sin x)$ とおける．① に代入し

$$\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)+r(\cos x-i\sin x)$$
$$=r(\cos\theta-i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos x-i\sin x)$$

r を掛けて整理し

$$(1-r^2)(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=(1-r^2)(\cos x-i\sin x)$$

$r=1$ のとき成り立つ．$r\neq 1$ のとき両辺を $1-r^2$ で割って $\cos\theta-i\sin\theta=\cos x-i\sin x$ となる．両辺の共役複素数をとって $\cos\theta+i\sin\theta=\cos x+i\sin x$ となり，$\beta=\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$ となる．

$\boldsymbol{r=1}$ **のとき，$\boldsymbol{\beta}$ は $\boldsymbol{|\beta|=1}$ である任意の複素数**

$\boldsymbol{r\neq 1}$ **のとき，$\boldsymbol{\beta}$ は**

$$\boldsymbol{r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\},\ \frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

注意 【必要条件であることを意識しないと大ボケ】

「β は絶対値が $\dfrac{1}{r}$ の任意の複素数である」などと答えてはいけない．$r\neq 1$ のときは β の偏角は α の偏角と連動する．

（3）を解くために「必要性と十分性」に分けているが，分けなくてもできる．スペース節約のために大学の形式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を使う．$\alpha=re^{i\theta}$，$\beta=Re^{ix}$（$r>0,\ R>0$）とおく．① に代入し

$$\frac{1}{r}e^{-i\theta}+\frac{1}{R}e^{-ix}=re^{-i\theta}+Re^{-ix}$$

$$\left(\frac{1}{r}-r\right)e^{-i\theta}=\left(R-\frac{1}{R}\right)e^{-ix} \quad\cdots\cdots④$$

左辺が 0（つまり $r=1$）ならば右辺が 0（つまり $R=1$）で β の偏角は任意．$r\neq 1$ ならば ④ の両辺の絶対値を考え

$\dfrac{1}{r}-r=R-\dfrac{1}{R}$ または $\dfrac{1}{r}-r=-\left(R-\dfrac{1}{R}\right)$

$\dfrac{R+r}{rR}=R+r$ または $R-r=\dfrac{r-R}{Rr}$

$rR=1$ または $r=R$ を得る．このとき順に

$e^{-i\theta}=e^{-ix}$，$e^{-i\theta}=-e^{-ix}$ となり，偏角もわかる．