3 n, m は自然数とする．赤玉と白玉の入った n 個の箱があり，次の条件 (a)，(b)，(c) を満たすとする．

(a)　それぞれの箱には赤玉と白玉が合計 n 個入っている．

(b)　赤玉はどの箱にも 1 個以上入っている．一方，白玉が入っていない箱はあってもよい．

(c)　それぞれの箱に入っている赤玉の個数は互いに異なる．

以下の試行 T を行う．

T：太郎さんは n 個の箱からひとつの箱を無作為に選び花子さんに渡す．花子さんは渡された箱の中から「無作為に玉をひとつ取り出し，色を確認し同じ箱にもどす作業」を $m+2$ 回繰り返す．

（1）　試行 T において，1 回目から m 回目までに取り出した玉がすべて赤玉である事象を X とし，その確率を p_n とする．このとき $\lim_{n\to\infty} p_n$ を m を用いて表せ．

（2）　試行 T において，$m+1$ 回目と $m+2$ 回目に取り出した玉のうち，少なくとも 1 個が赤玉である事象を Y とする．（1）の事象 X が起こったときの事象 Y の起こる条件付き確率 $P_X(Y)$ を q_n とする．このとき $\lim_{n\to\infty} q_n$ を m を用いて表せ．

（22　京都府立医大）

3 数学III【区分求積】標準

▶解答◀　（**1**）　k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．赤玉が k 個，白玉が $n-k$ 個入っている箱を箱 k と呼ぶことにすると，条件 (a)，(b)，(c) より箱 k は $k=1, 2, \cdots, n$ の各 k についてそれぞれ 1 つずつある．太郎さんが箱 k を選んで花子さんに渡すとき（確率 $\frac{1}{n}$），花子さんが箱 k から赤玉を取り出す確率は $\frac{k}{n}$ であるから $p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \int_0^1 x^m\,dx = \left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{m+1}}$$

（**2**）　太郎さんが箱 k を選んで花子さんに渡し，花子さんが $m+1$ 回目と $m+2$ 回目のうち少なくとも 1 回は箱 k から赤玉を取り出す確率を r_n とすると

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m \left\{1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left\{2\cdot\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{k}{n}\right)^{m+1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{m+2}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \int_0^1 (2x^{m+1}-x^{m+2})\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{m+2}x^{m+2}-\frac{1}{m+3}x^{m+3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{m+2}-\frac{1}{m+3} = \frac{m+4}{(m+2)(m+3)}$$

$$q_n = \frac{r_n}{p_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\frac{m+4}{(m+2)(m+3)}}{\frac{1}{m+1}} = \boldsymbol{\frac{(m+1)(m+4)}{(m+2)(m+3)}}$$